

y

$(3, 2)$

2

1

-1

1

2

3

x

-1

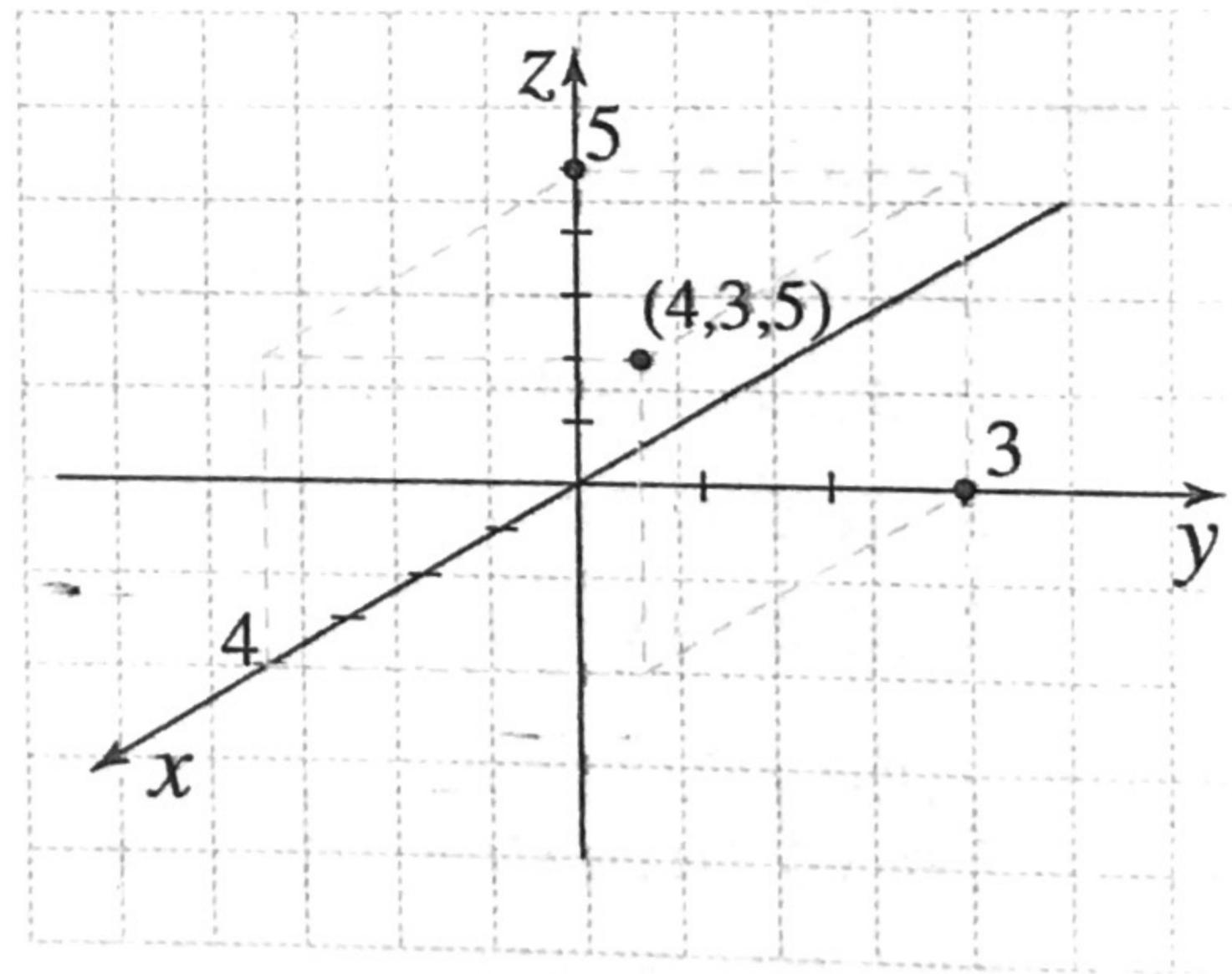
-2

y

Representar gráficamente en el espacio el punto $(4, 3, 5)$.

Solución:

Para representar el punto $(4, 3, 5)$ se ubica sobre el eje x el punto cuya coordenada es 4, y sobre el eje y el punto cuya coordenada es 3. Se trazan segmentos paralelos a los ejes x y y . Luego, se traza un segmento paralelo al eje z de longitud 5 unidades.





Para ilustrar la manera como se realiza un tratamiento de datos, consideremos el estudio del alargamiento de un resorte cuando se suspenden pesas en su extremo (figura 13). En este caso, la longitud de alargamiento del resorte (A) es la variable dependiente, la masa (m) del objeto que colgamos es la variable independiente y la elasticidad del resorte es una variable controlada que mantenemos constante, ya que se trata del mismo resorte.

En un experimento se puede tener más de una variable cuyo cambio afecta la variable dependiente. Por ejemplo, para estudiar el comportamiento del volumen de un gas, se tiene que este depende de la presión a la cual se somete y de la temperatura a la cual se encuentra. Una variación en la presión produce una variación en el volumen; así mismo, una variación en la temperatura produce una variación en el volumen.

Dadas las múltiples situaciones de la vida cotidiana en las cuales intervienen relaciones entre dos variables, resulta útil recurrir al concepto de función definido en matemáticas. Por ejemplo, para el caso del resorte, la variable alargamiento está representada en función de la variable masa, pues a cada valor de la masa que se cuelga, le corresponde un único valor del alargamiento.

Como sabemos, hay varias formas de representar funciones y es posible establecer relaciones entre las distintas formas de representación.

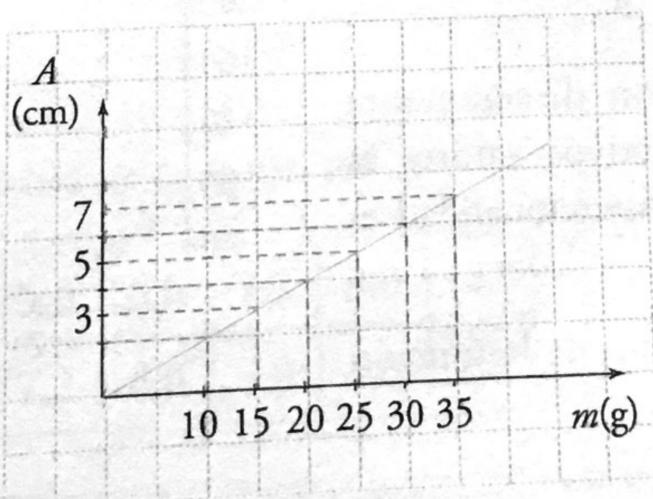
3.3 La construcción de gráficas

Tanto las funciones como las relaciones entre dos variables se pueden representar a partir de tablas de datos. Una tabla es un arreglo, de dos filas o dos columnas, en el cual se escriben todos o algunos valores de la variable independiente y los respectivos valores de la variable dependiente. En la siguiente tabla se presentan los valores de la masa del cuerpo colgada del resorte y su respectivo alargamiento.

Masa del cuerpo colgado (g)	10	15	20	25	30	35
Alargamiento (cm)	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0

La representación gráfica de una función se construye en el plano cartesiano. Sobre el eje x se ubica el rango entre el cual están los valores dados a la variable que se considera independiente. Sobre el eje y se ubica el rango entre el cual están los valores que corresponden a la variable dependiente.

La representación gráfica de una función se obtiene al constituir en el plano cartesiano un número suficiente de parejas ordenadas. A continuación, presentamos la gráfica.



El alargamiento A del resorte depende de la masa m del cuerpo que se cuelga.

Es importante anotar que, a partir de la gráfica, se puede analizar el comportamiento de la función.

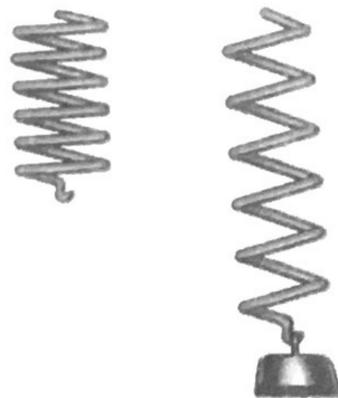


Figura 13. Es posible encontrar la relación matemática entre la masa del objeto que se cuelga y el alargamiento producido en el resorte.

Recuerda que

Una función f es una correspondencia que asigna a cada elemento x de un conjunto X un único elemento y de un conjunto Y .



Recuerda que...

La pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano cartesiano se define como

$$\text{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

3.3.1 Proporcionalidad directa



Ampliación multimedia

Dos magnitudes son directamente proporcionales si la razón entre cada valor de una de ellas y el respectivo valor de la otra es igual a una constante. A la constante se le llama constante de proporcionalidad.

Si dos magnitudes, x y y , son directamente proporcionales, se cumple que:

- El cociente entre ellas siempre es constante, es decir $\frac{y}{x} = k$, donde k se denomina constante de proporcionalidad.
- Sus valores se relacionan mediante la expresión $y = k \cdot x$.

En la gráfica presentada en la página anterior podemos observar que cuanto mayor es la masa (m) del objeto que colgamos del resorte, mayor es su alargamiento (A). Además, al duplicar la masa, el alargamiento se duplica, al triplicar la masa, el alargamiento se triplica, y así sucesivamente. De esta manera, al dividir el alargamiento entre el respectivo valor de la masa siempre se obtiene el mismo valor.

EJEMPLO

... cada vez que transcurre una hora.

EJEMPLO

Un tren avanza 40 km hacia el norte cada vez que transcurre una hora.

- Elaborar una tabla de valores para la distancia recorrida en los tiempos 1, 2, 3, 4 y 5 horas.
- Determinar la razón entre cada distancia y su respectivo tiempo. ¿Las variables distancia y tiempo son directamente proporcionales?
- Realizar la gráfica que representa los valores de las variables.

Solución:

- El tiempo y la distancia que recorre se representan en la siguiente tabla.

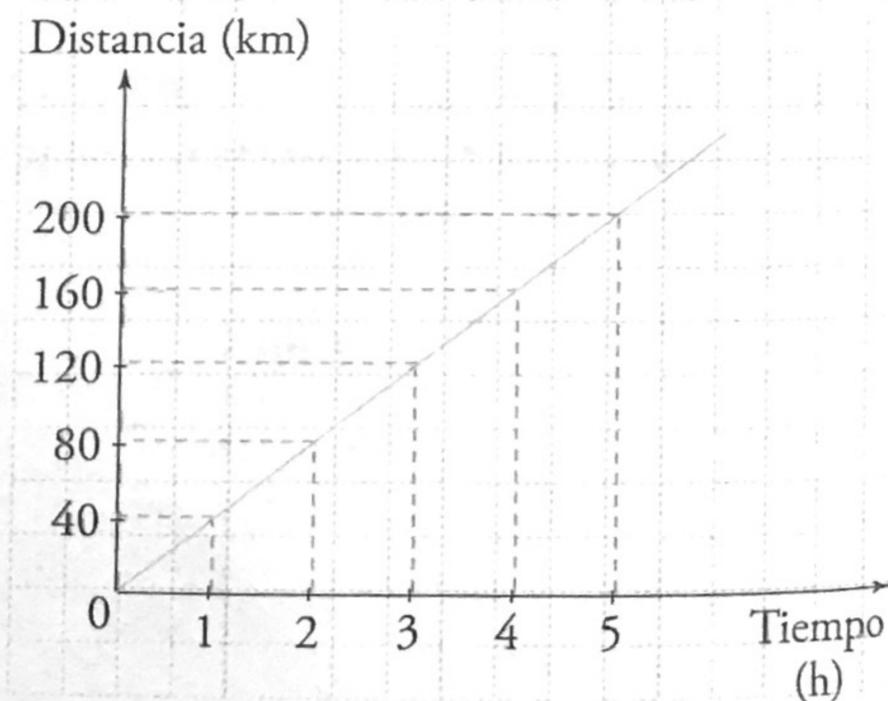
Tiempo (horas)	1	2	3	4	5
Distancia (kilómetros)	40	80	120	160	200

- La razón entre cada valor de la distancia y su respectivo valor del tiempo se obtiene así:

$$\frac{40}{1} = 40, \frac{80}{2} = 40, \frac{120}{3} = 40, \frac{160}{4} = 40 \text{ y } \frac{200}{5} = 40$$

Las magnitudes distancia recorrida y tiempo son directamente proporcionales, porque la razón entre sus respectivos valores es constante e igual a 40. Es decir, la constante de proporcionalidad es 40 km/h.

- En la figura se puede observar la representación gráfica de la función que relaciona las variables distancia y tiempo.



$$\text{Pendiente} = \frac{200 \text{ km} - 0 \text{ km}}{5 \text{ h} - 0 \text{ h}} = 40 \text{ km/h}$$

3.3.2 Proporcionalidad inversa

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando el producto de cada valor de una magnitud por el respectivo valor de la otra es igual a una constante, llamada constante de proporcionalidad inversa.

Por ejemplo, el tiempo, t , y la velocidad, v , empleados en recorrer determinada distancia son magnitudes inversamente proporcionales. A medida que la velocidad aumenta, el tiempo que emplea en el recorrido disminuye, de tal manera que si la velocidad se duplica, el tiempo se reduce a la mitad; si la velocidad se triplica, el tiempo se reduce a la tercera parte, y así sucesivamente.

Si dos magnitudes, x y y , son inversamente proporcionales se cumple que:

- El producto entre ellas es constante, es decir, $x \cdot y = k$, donde k es la constante de proporcionalidad inversa.
- Sus valores se relacionan mediante la expresión $y = \frac{k}{x}$

EJEMPLO

Se desea cortar placas rectangulares cuya área sea igual a 36 cm^2 .

- Elaborar la tabla que muestra los posibles valores para el largo y el ancho de las placas.
- Determinar la relación entre el largo, l , y el ancho, a , de los rectángulos.
- Determinar la expresión matemática que relaciona el largo y el ancho de las placas.
- Realizar la gráfica que representa los valores del largo y el ancho.

Solución:

- Una tabla de valores podría ser la siguiente:

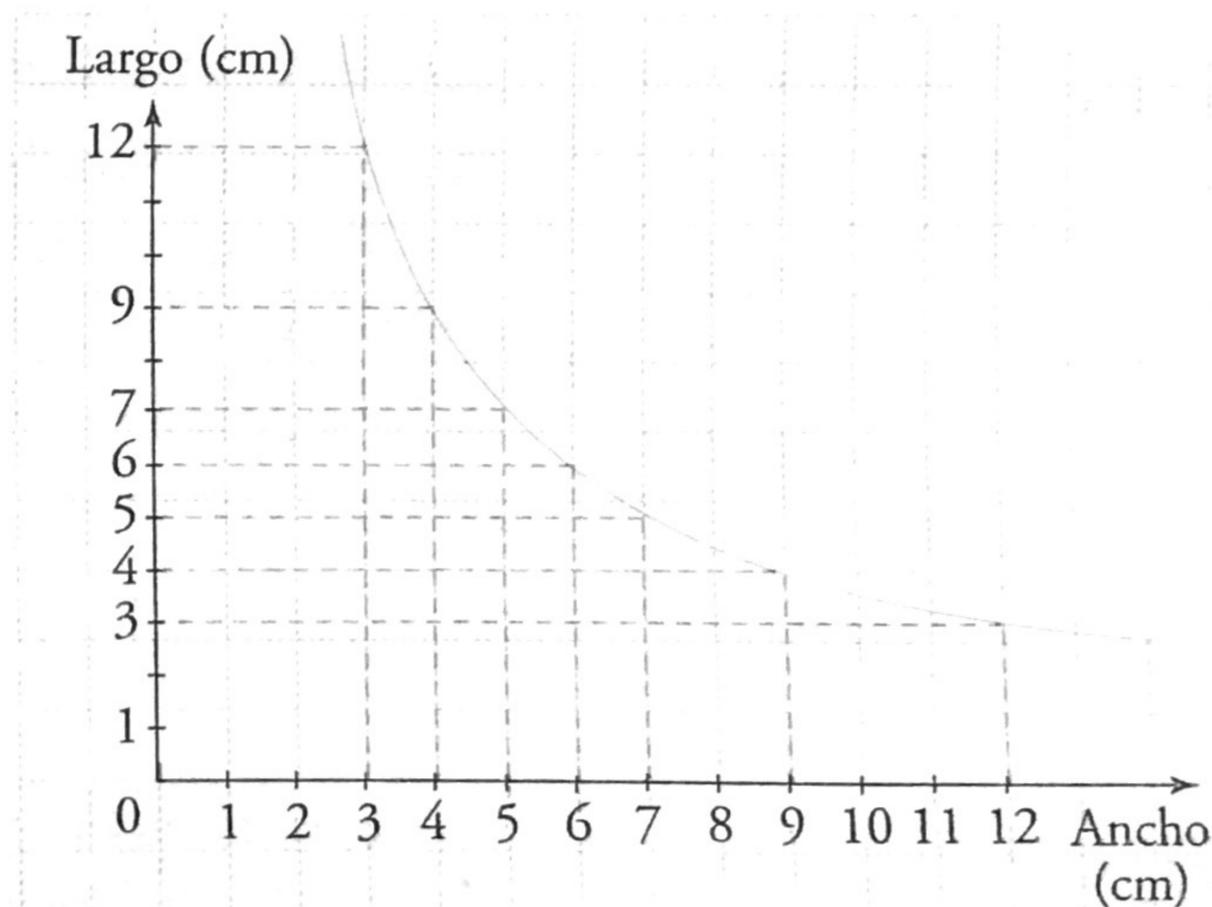
Largo (cm)	3,0	4,0	5,0	6,0	7,2	9,0	12,0
Ancho (cm)	12,0	9,0	7,2	6,0	5,0	4,0	3,0

- Se observa que, a medida que el largo del rectángulo aumenta, el ancho disminuye. Además, es posible observar que al duplicar el largo, el ancho disminuye

a la mitad; al triplicar el largo, el ancho disminuye a la tercera parte, etc.

Así, entre el largo y el ancho de las placas de área 36 cm^2 , podemos establecer una relación de proporcionalidad inversa.

- El producto del largo, l , por el ancho, a , siempre toma el mismo valor, 36. Por tanto, $l \cdot a = 36$.
- Al representar los datos en el plano cartesiano obtenemos la gráfica que se muestra a continuación.





VERIFICO CONCEPTOS

1. ¿Cómo se clasifican los factores que intervienen en la ocurrencia de un fenómeno físico?

2. Escribe V, si el enunciado es verdadero o F, si es falso.

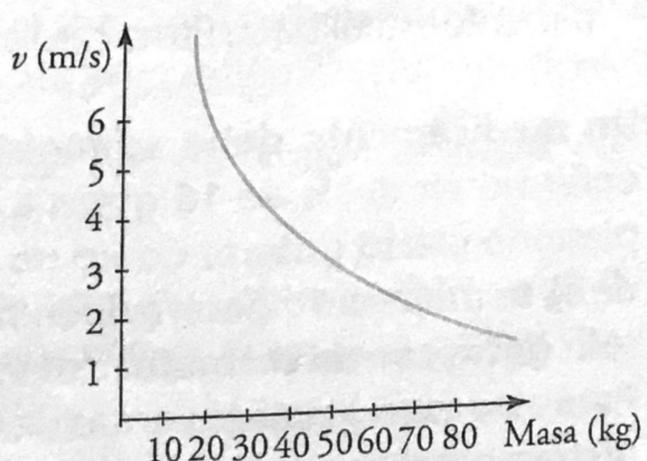
- Dos variables son directamente proporcionales cuando el cociente entre las dos es un valor constante.
- Cuando una magnitud crece mientras que la otra decrece se dice que las dos magnitudes son inversamente proporcionales.
- Cuando la gráfica que muestra el comportamiento de dos variables es una línea recta ascendente, su pendiente representa la constante de proporcionalidad entre las dos variables.

3. Para un cuerpo que se mueve en línea recta, la posición que ocupa en el tiempo está dada por la ecuación $x = 2,5 t$; para este cuerpo es correcto afirmar que:

- a. Cada segundo su velocidad es mayor.
- b. Se mueve con velocidad constante de 2,5 m/s.
- c. En cada segundo de tiempo que pasa, recorre menor distancia.
- d. Si el tiempo se duplica el valor de x se cuadruplica.

4. A continuación se muestran los cambios en la velocidad que experimentan diferentes masas al aplicárseles la misma fuerza.

Velocidad (m/s)	6	4	3	2	1,5
Masa (kg)	20	30	40	60	80



- a. ¿Qué relación hay entre las variables? ¿Explica?
- b. Si la relación es de proporcionalidad, ¿cuál es el valor de la constante de proporcionalidad?
- c. ¿Cuál será la velocidad para una masa de 50 kg?
- d. ¿Qué masa debe tener el cuerpo para que la variación en su velocidad sea 0,5 m/s?

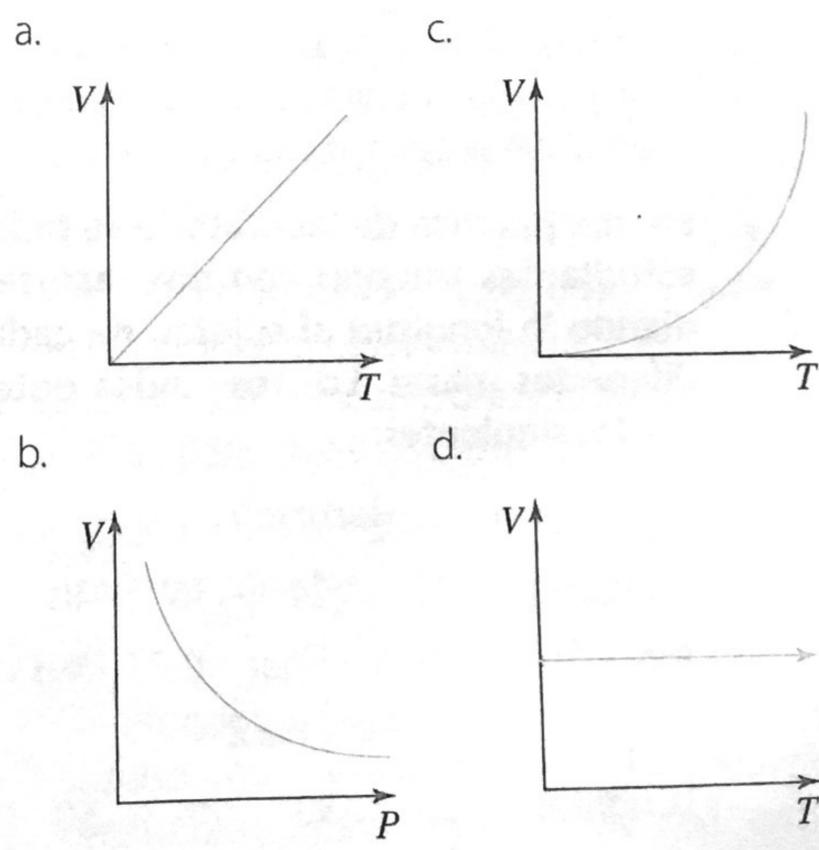
5. En la expresión $a = F/m$, si F es constante y se duplica el valor de m , entonces a :

- a. Se mantiene constante.
- b. Se reduce a la mitad.
- c. Se duplica.
- d. Se cuadruplica.

Explica tu respuesta.

6. El área de la superficie de un paralelepípedo regular es la suma de las áreas de las seis caras. Si se duplica cada una de sus dimensiones, ¿en qué factor es mayor el área con respecto al área inicial?

7. Para cada una de las siguientes gráficas determina el tipo de relación que existe entre las dos variables.





SOLUCIONO PROBLEMAS

8 Se miden los diámetros (cm) y perímetros (cm) de varias circunferencias y se obtienen los siguientes resultados:

Diámetro	4	8	10	12	16
Perímetro	12,6	25,1	31,4	37,7	50,2

Construye la gráfica y responde:

- ¿Cuál de las dos variables sería la independiente y cuál la dependiente?
- ¿Qué relación hay entre el perímetro de la circunferencia y su diámetro?
- ¿Cuál es la ecuación que relaciona las dos variables?
- ¿En caso de proporcionalidad entre el diámetro y el perímetro cuál es la constante de proporcionalidad?

9 Para los siguientes casos determina la variable dependiente y la variable independiente. Explica cuáles son directamente proporcionales y cuáles inversamente proporcionales.

- La masa de varias esferas a medida que su volumen aumenta, si son todas de un mismo material.
- La presión que ejerce un fluido sobre un cuerpo a medida que desciende a través de él.
- La medición de la presión que experimenta una lámina a medida que se disminuye el área en la que se aplica dicha presión.

10 En una práctica de laboratorio se pide a los estudiantes trabajar con dos resortes, midiendo la longitud al sujetar, de cada uno, diferentes masas. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Resorte 1

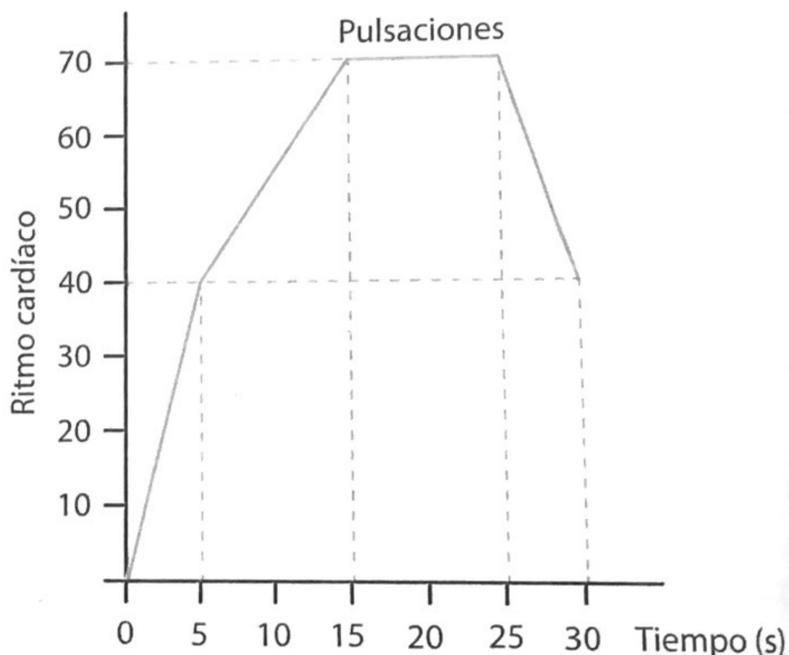
Longitud	12	24	36	48	60
Masa (kg)	0	2	4	6	8

Resorte 2

Longitud	20	30	40	50	60
Masa (kg)	0	2	4	6	8

- Construye la gráfica de longitud (x) en función de la masa (m) en un mismo plano cartesiano.
- Halla la ecuación que relaciona la longitud con la masa para los dos resortes.
- ¿Para cuál de los dos resortes aumenta más la longitud al colgar la masa?

11 Cuando se sospecha de una insuficiencia cardíaca en una persona, los médicos realizan una prueba de esfuerzo; esta sirve para evaluar el funcionamiento del corazón cuando está sometido a un esfuerzo físico, como el ejercicio. Un paciente pedalea en una bicicleta estática y mide su ritmo cardíaco. Los resultados se muestran en la gráfica.



Responde las siguientes preguntas y justifica tu respuesta.

- ¿El paciente no realiza actividad cardíaca en los primeros 5 segundos?
- Cuando comienza la actividad física, ¿el ritmo cardíaco del corazón es directa o inversamente proporcional al tiempo?
- ¿Existe un momento de la prueba en el que el paciente estabiliza su ritmo cardíaco?

12 Un medicamento debe administrarse a un enfermo en dosis de 16 gotas a la vez, empleando cierto gotero. Como no se dispone de él, se utiliza otro gotero diferente que deja salir gotas con un diámetro dos veces mayor. Para este caso, ¿cuántas gotas deberán suministrarse al paciente?

3. Funciones y gráficas

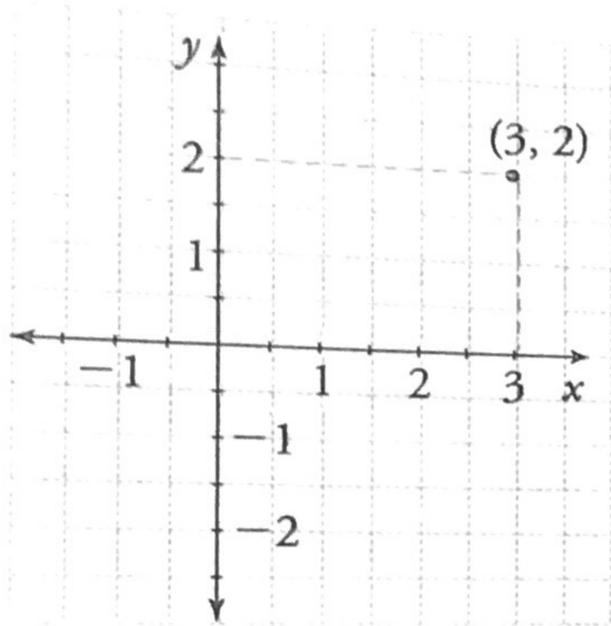
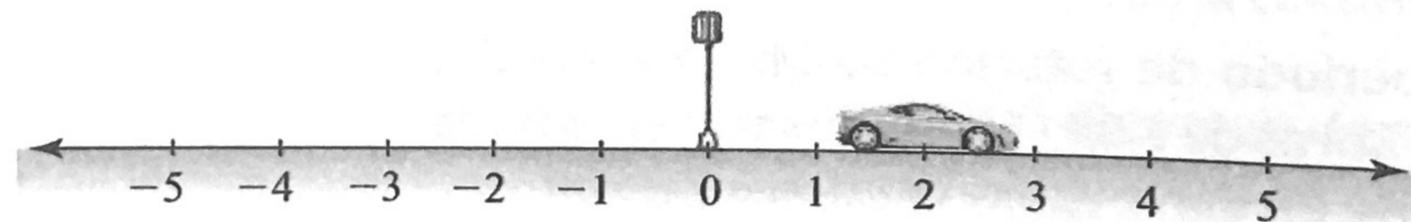


Figura 11. En el plano cartesiano a cada punto le corresponde un par ordenado.

3.1 Sistemas coordenados

En la mayoría de estudios es necesario efectuar medidas relacionadas con los factores que intervienen en un fenómeno. Los datos que se obtienen de las mediciones, en lo posible, se presentan por medio de representaciones gráficas que pueden ser en una dimensión, en dos dimensiones o en tres dimensiones.

- En una dimensión se representan los valores de una variable sobre la recta de los números reales. Por ejemplo, la posición de un objeto que se mueve en línea recta se puede representar sobre una recta, como se muestra en la siguiente figura:



- En dos dimensiones se utiliza el plano cartesiano (figura 11), en el que a cada punto le corresponde una pareja ordenada. Este tipo de representación es muy útil para analizar los datos obtenidos en un experimento o para relacionar variables.
- En tres dimensiones se representan puntos en el espacio, lo cual se realiza por medio de un sistema de tres ejes coordenados, perpendiculares entre sí, llamados eje x , eje y y eje z . En este caso, a cada punto del espacio le corresponde una terna (x, y, z) , como se muestra en la figura 12.

Este tipo de representación es útil, por ejemplo, para describir el movimiento de un objeto que se mueve en el espacio; se utilizan los tres ejes coordenados.