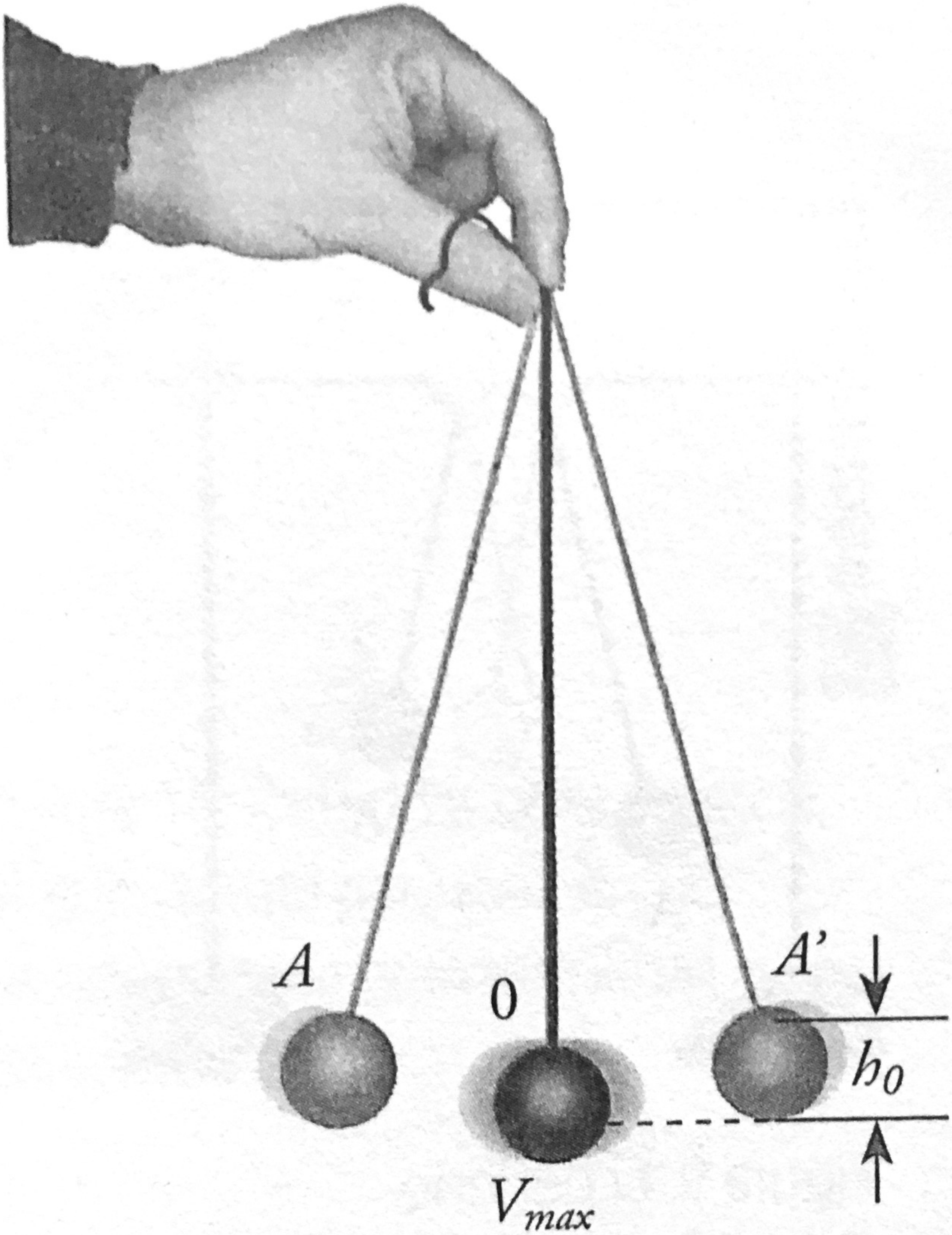


Figura 8. En la posición de equilibrio la energía mecánica del cuerpo es toda cinética, mientras que en los extremos es toda potencial.

Una expresión para la aceleración del objeto en cualquier posición se define a partir de la relación entre la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo con movimiento armónico simple y la expresión de la fuerza determinada por la segunda ley de Newton:

$$F = -k \cdot x \qquad y \qquad F = m \cdot a$$

Al igualar las dos ecuaciones se tiene que:

$$-k \cdot x = m \cdot a \quad \text{Al igualar las expresiones}$$

$$a = -k \cdot x/m \quad \text{Al despejar } a$$

Entonces, la expresión para la aceleración de un cuerpo con movimiento armónico simple en cualquier posición es:

$$a = -k \cdot x/m$$

Según la segunda ley de Newton, la dirección de la fuerza y la dirección de la aceleración son la misma. En concordancia con la ley de Hooke, concluimos que *la fuerza de restitución del resorte es cero cuando el cuerpo se encuentra en el punto de equilibrio y máxima en los puntos extremos.*

Recuerda que...

$$[\text{J}] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Esto indica que para hallar la energía cinética, la velocidad debe tener unidades de $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y la masa de [kg].

EJEMPLO

La figura muestra la gráfica de la energía potencial en función de la amplitud de un cuerpo de 1 kg que realiza un movimiento armónico simple.

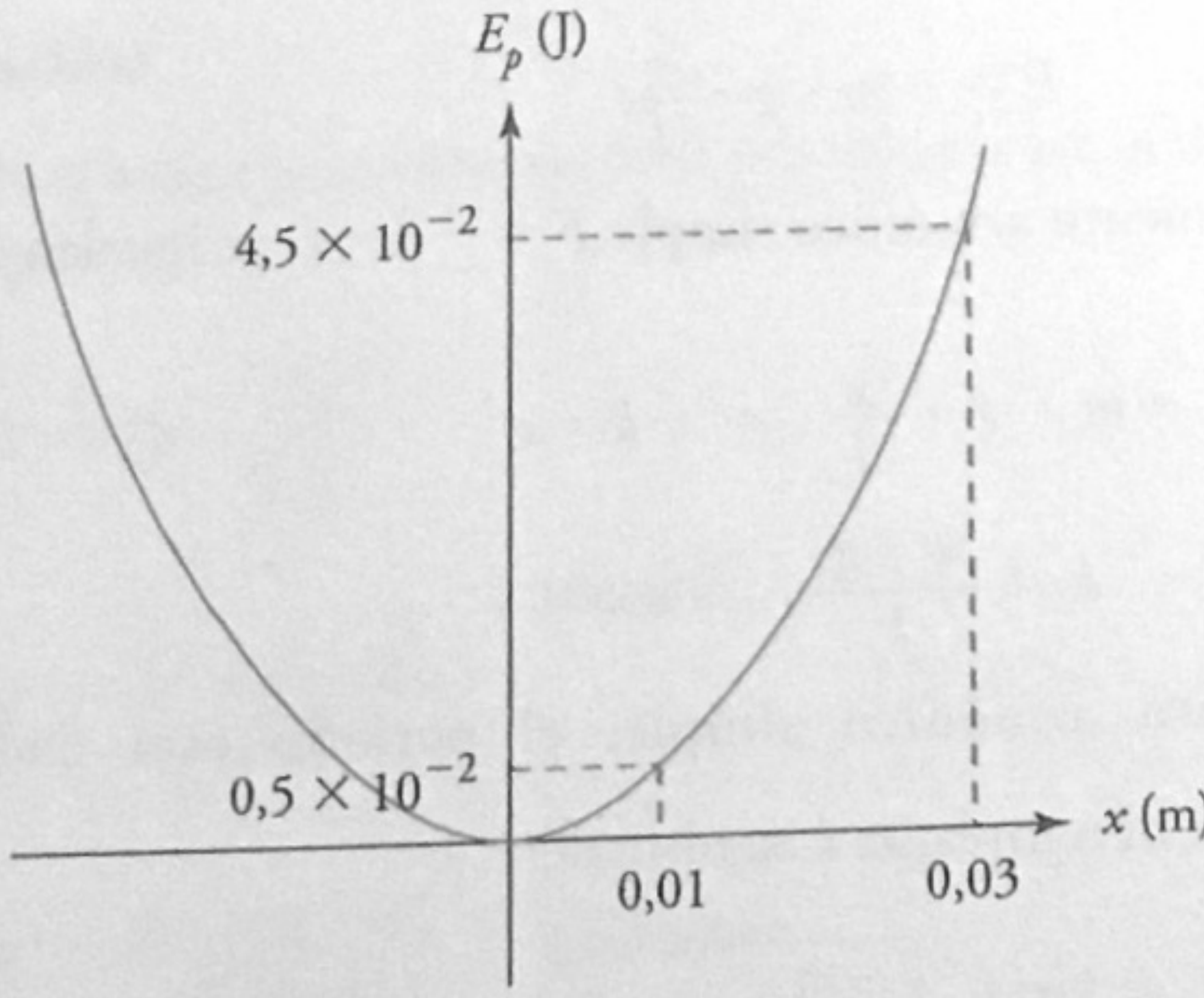
Si la amplitud del cuerpo es 0,03 m, calcular:

a. La energía mecánica del cuerpo en este movimiento armónico simple.

b. La constante de restitución del movimiento.

c. El período de oscilación.

d. La energía cinética en la posición $x = 0{,}01$ m y la velocidad que alcanza el cuerpo en este punto.



Solución:

a. Para $x = 0{,}03$ m, que es el valor de la amplitud, la gráfica muestra que el valor de la energía potencial es $E_p = 4{,}5 \times 10^{-2}$ J, entonces: $E_m = 4{,}5 \times 10^{-2}$ J

La energía mecánica es igual a $4{,}5 \times 10^{-2}$ J.

b. Para calcular la constante de restitución del movimiento se tiene que:

$$k = \frac{2E_p}{A^2} = \frac{2 \cdot 4{,}5 \times 10^{-2}\ J}{(0{,}03\ \text{m})^2} = 100\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

La constante de restitución del movimiento es 100 N/m.

c. El período de un MAS está dado por:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1\ \text{kg}}{100\ \text{N/m}}} = 0{,}63\ \text{s}$$

El período de oscilación es 0,63 s.

d. En la gráfica vemos que para $x = 0{,}01$ m la $E_p = 0{,}5 \times 10^{-2}$ J, entonces la E_c es:

$$E_m = E_p + E_c$$

$$E_c = E_m - E_p \quad \text{Al despejar } E_c$$

$$E_c = 4{,}5 \times 10^{-2}\ \text{J} - 0{,}5 \times 10^{-2}\ \text{J} = 4{,}0 \times 10^{-2}\ \text{J}.$$

La energía cinética es igual a $4{,}0 \times 10^{-2}$ J

La velocidad para esta posición se expresa a partir de la ecuación de la energía cinética, así:

$$v = \sqrt{\frac{2\,E_c}{\text{m}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \times 10^{-2}\ J}{1\ \text{kg}}} = 0{,}28\ \text{m/s}$$

La velocidad que alcanza el cuerpo en este punto es 0,28 m/s.

Recuerda que…

$$[J] = kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$$

Esto indica que para hallar la energía cinética, la velocidad debe tener unidades de $\frac{m}{s}$ y la masa de $[kg]$.

EJEMPLO

La figura muestra la gráfica de la energía potencial en función de la amplitud de un cuerpo de 1 kg que realiza un movimiento armónico simple.

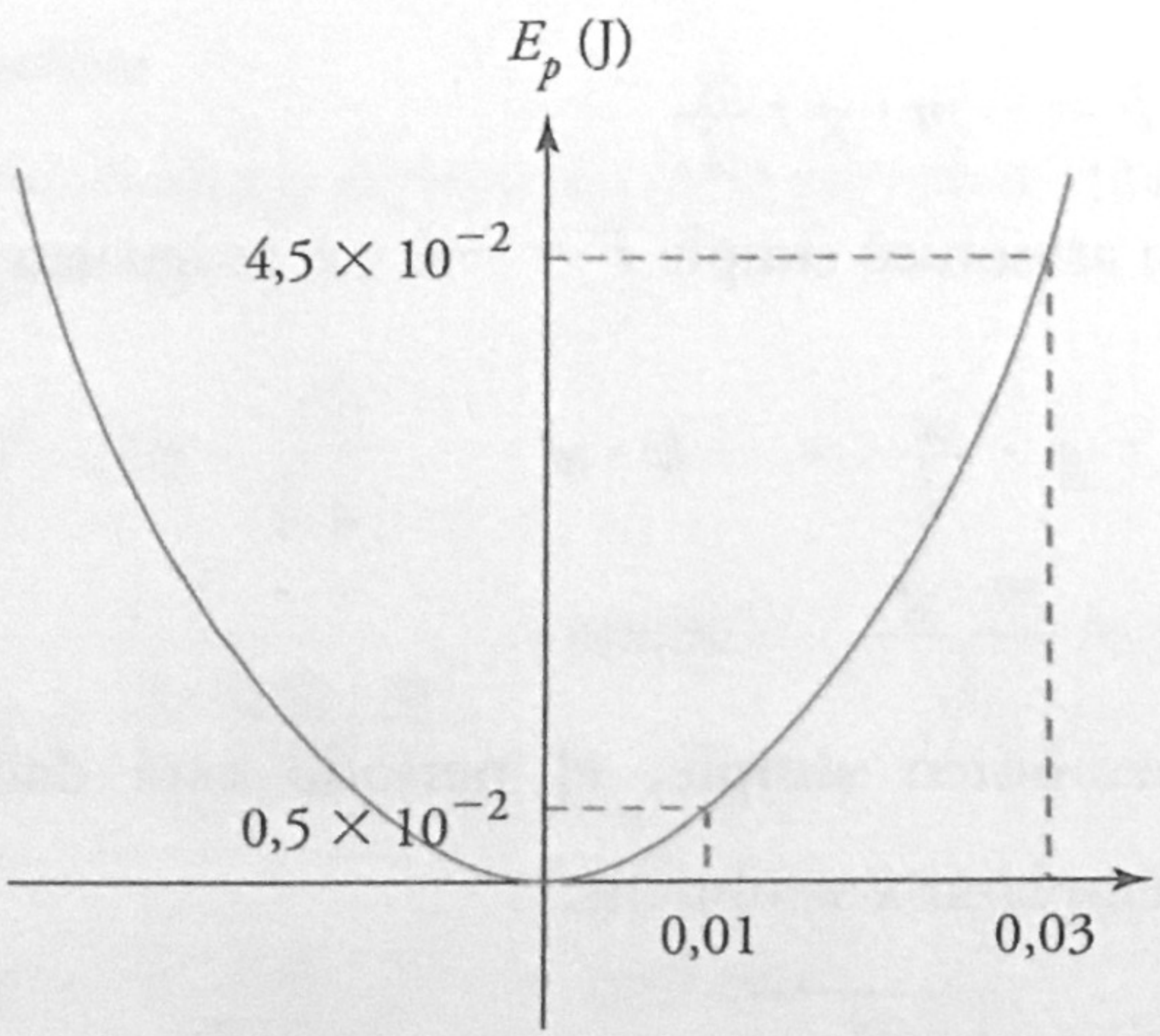
Si la amplitud del cuerpo es 0,03 m, calcular:

a. La energía mecánica del cuerpo en este movimiento armónico simple.

b. La constante de restitución del movimiento.

c. El período de oscilación.

d. La energía cinética en la posición $x = 0{,}01$ m y la velocidad que alcanza el cuerpo en este punto.



Solución:

a. Para $x = 0{,}03$ m, que es el valor de la amplitud, la gráfica muestra que el valor de la energía potencial es $E_p = 4{,}5 \times 10^{-2}$ J, entonces: $E_m = 4{,}5 \times 10^{-2}$ J

La energía mecánica es igual a $4{,}5 \times 10^{-2}$ J.

b. Para calcular la constante de restitución del movimiento se tiene que:

$$k = \frac{2E_p}{A^2} = \frac{2 \cdot 4{,}5 \times 10^{-2}\ J}{(0{,}03\ \text{m})^2} = 100\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

La constante de restitución del movimiento es 100 N/m.

c. El período de un MAS está dado por:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1\ \text{kg}}{100\ \text{N/m}}} = 0{,}63\ \text{s}$$

El período de oscilación es 0,63 s.

d. En la gráfica vemos que para $x = 0{,}01$ m la $E_p = 0{,}5 \times 10^{-2}$ J, entonces la E_c es:

$E_m = E_p + E_c$

$E_c = E_m - E_p$ Al despejar E_c

$E_c = 4{,}5 \times 10^{-2}\ \text{J} - 0{,}5 \times 10^{-2}\ \text{J} = 4{,}0 \times 10^{-2}$ J.

La energía cinética es igual a $4{,}0 \times 10^{-2}$ J

La velocidad para esta posición se expresa a partir de la ecuación de la energía cinética, así:

$$v = \sqrt{\frac{2\,E_c}{\text{m}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \times 10^{-2}\ J}{1\ \text{kg}}} = 0{,}28\ \text{m/s}$$

La velocidad que alcanza el cuerpo en este punto es 0,28 m/s.

2.2 El péndulo simple

Recurso imprimible

Enlace web

2.2.1 El período

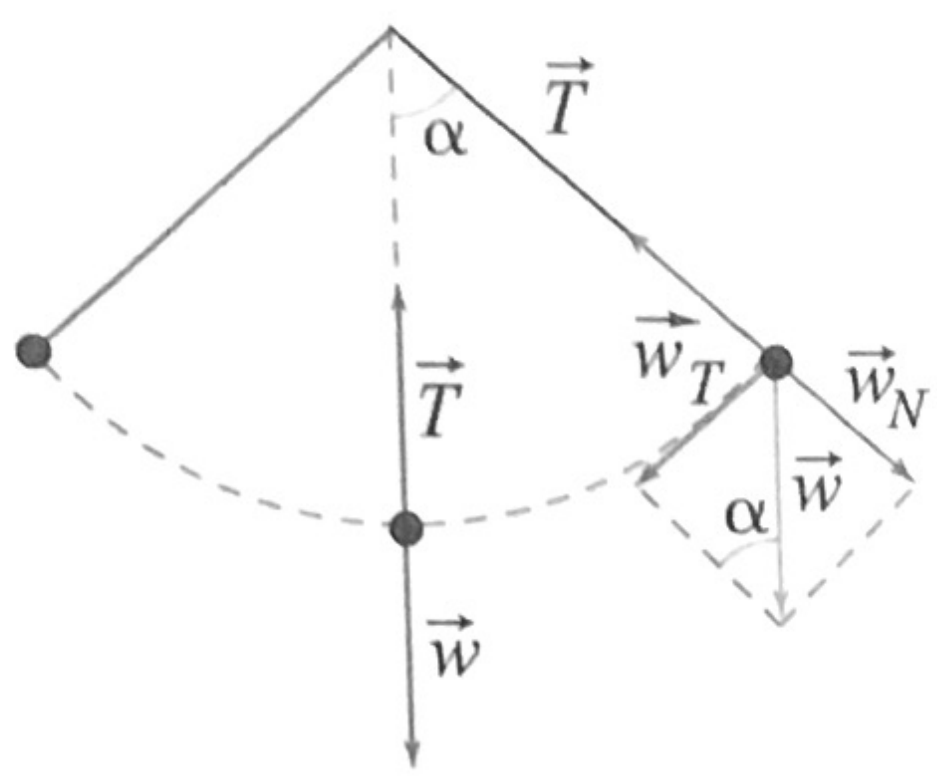


Figura 7. Análisis de las fuerzas que actúan sobre la masa del péndulo cuando está en equilibrio y cuando no lo está.

Un péndulo simple es un modelo que consiste en una masa puntual suspendida de un hilo de longitud L cuya masa se considera despreciable. La masa oscila de un lado para otro alrededor de su posición de equilibrio, describiendo una trayectoria a lo largo del arco de un círculo con igual amplitud.

En la figura 7 se observa que cuando el péndulo está en equilibrio, la tensión *(T)* del hilo se anula con el peso de la masa *(w)*. Cuando el péndulo no está en su posición de equilibrio, el hilo forma un ángulo α con la vertical y el peso se descompone en dos fuerzas:

- Componente del peso, tangencial a la trayectoria

$$w_T = -m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha$$

- Componente del peso, perpendicular o normal a la trayectoria

$$w_N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

La tensión del hilo y la componente normal del peso se anulan, por tanto, la fuerza de restitución *(F)*, encargada del movimiento oscilatorio, es la componente tangencial del peso, luego:

$$F = w_T = -m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha$$

La fuerza de restitución es proporcional al sen α, así que el movimiento no es armónico simple. Sin embargo, para ángulos menores de 10°, expresados en radianes, el sen α tiene la propiedad de ser prácticamente igual a la medida de dicho ángulo α; así, para ángulos pequeños tenemos que:

$$F = -m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha$$

como $\text{sen}\,\alpha = \alpha$, se obtiene que:

$$F = -m \cdot g \cdot \alpha$$

Como la longitud x del arco, el radio l y el ángulo α se relacionan mediante la expresión $x = l \cdot \alpha$, entonces:

$$F = -m \cdot g \cdot \frac{x}{l}$$

Puesto que para un movimiento armónico simple $F = -k \cdot x$, se igualan las dos fuerzas así:

$$-m \cdot g \cdot \frac{x}{l} = -k \cdot x$$

$$k = \frac{m \cdot g}{l} \quad \text{Al despejar } k$$

En cualquier movimiento armónico simple, el período está dado por $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$, entonces, al remplazar k se obtiene:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{m \cdot g}{l}}} \quad \text{Al remplazar } k$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{Al simplificar}$$

Físicamente

Determina la frecuencia de un péndulo simple si se sabe que su período es de 0,5 s.

El período de oscilación de un péndulo simple, con una amplitud menor de 10°:

- Es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud del hilo que sostiene el cuerpo.
- Es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la aceleración de la gravedad.
- No depende de la masa del cuerpo.
- No depende de la amplitud angular.

2.2.2 La energía

En el movimiento armónico simple de un péndulo, en ausencia de fricción, la energía mecánica se conserva.

En los extremos *A* y *A'* de la trayectoria del péndulo mostrado en la figura 8, la energía cinética de la esfera es igual a cero, debido a que la velocidad del objeto es cero y la energía potencial gravitacional, medida desde la posición más baja de la trayectoria, es máxima, por tanto la energía mecánica es toda potencial.

En la posición de equilibrio *O*, la energía cinética es máxima y la energía potencial gravitacional es igual a cero debido a que la altura con respecto al nivel de referencia es cero, por tal razón, toda la energía potencial se transformó en energía cinética y la velocidad del cuerpo es máxima.

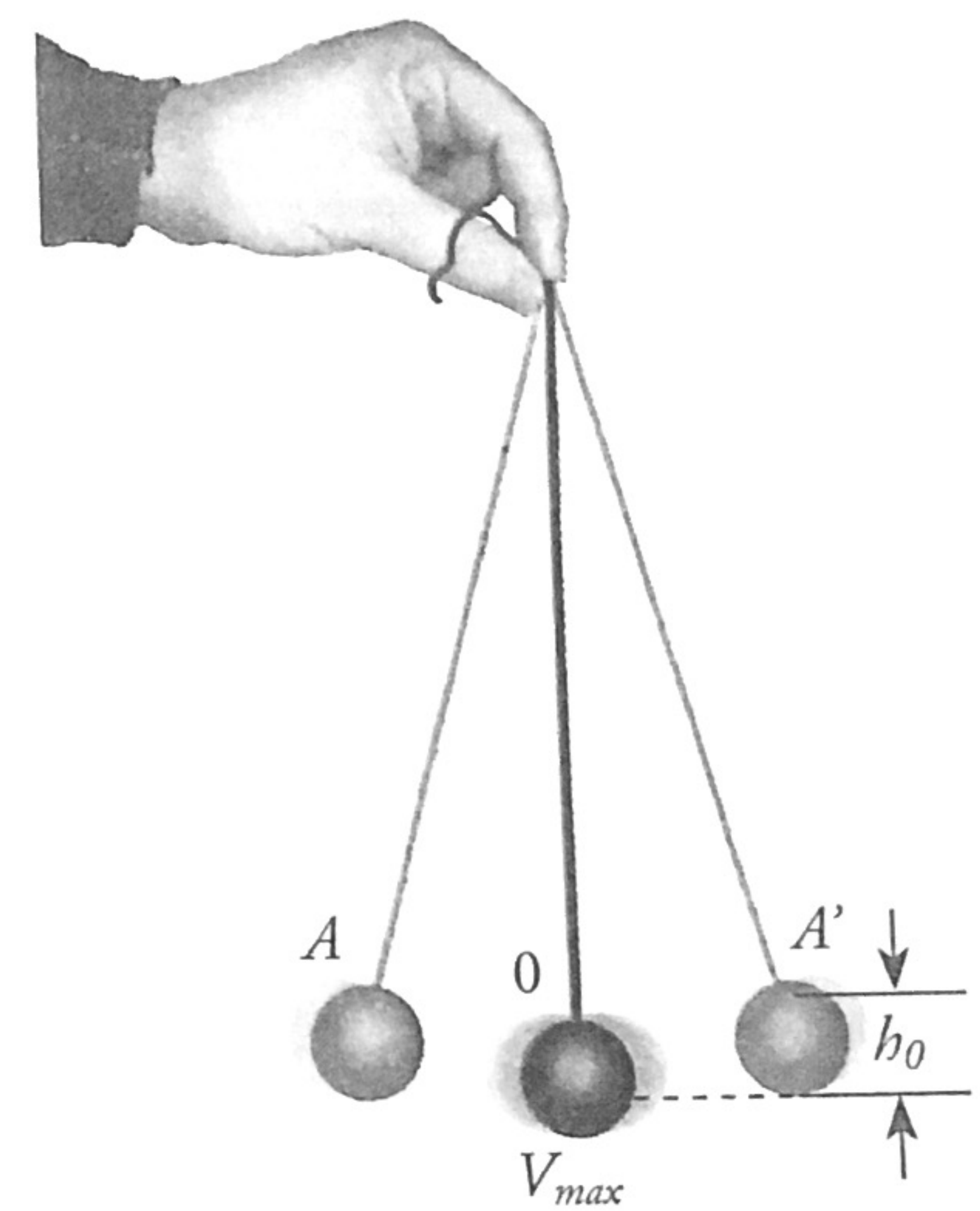


Figura 8. En la posición de equilibrio la energía mecánica del cuerpo es toda cinética, mientras que en los extremos es toda potencial.

EJEMPLOS

1. Para establecer el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie lunar, un astronauta realiza una serie de mediciones del período de oscilación de un péndulo de longitud 1 m. Si el valor promedio de los datos obtenidos es 4,92 s, determinar:

a. La aceleración de la gravedad lunar.

b. La relación existente entre las aceleraciones gravitacionales lunar y terrestre.

Solución:

a. Para hallar la aceleración de la gravedad lunar se tiene que:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$g = \frac{4 \cdot 1\ \text{m} \cdot \pi^2}{(T)^2}$$ Al despejar g

$$g = \frac{4 \cdot 1\ \text{m} \cdot \pi^2}{(4{,}92\ \text{s})^2} = 1{,}63\ \text{m/s}^2$$ Al remplazar y calcular

La aceleración lunar es 1,63 m/s^2.

b. La relación entre g_{lunar} y $g_{terrestre}$ se realiza por medio de la siguiente expresión:

$$\frac{g_{lunar}}{g_{terrestre}}$$ Al relacionar

$$\frac{1{,}63\ \text{m/s}^2}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 0{,}16$$ Al remplazar y calcular

La g_{lunar} es aproximadamente 1/6 de la $g_{terrestre}$.

2. Calcular la velocidad máxima ($v_{máx}$) para el péndulo de la figura 8 si la altura del objeto en el extremo *A'* de la trayectoria es h_0.

Solución:

En ausencia de fricción, la energía mecánica se conserva. Por tanto, en el extremo de la trayectoria la energía mecánica es:

$$E_m = m \cdot g \cdot h_0$$

y en la posición *O* es:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot \text{m} \cdot v_{máx}^2$$

Como $E_{c\ máx} = E_{p\ máx}$, se tiene que:

$$v_{máx} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}$$

VERIFICO CONCEPTOS

1 Escribe V, si el enunciado es verdadero o F, si es falso. Justifica tu respuesta.

- ☐ En los extremos de la trayectoria de un movimiento armónico simple la energía cinética es cero.
- ☐ La energía potencial máxima se encuentra en el punto de equilibrio del movimiento armónico simple.
- ☐ El período de un péndulo depende de la masa que él posee.
- ☐ Al aumentar la longitud de un péndulo el período de oscilación aumenta.
- ☐ En los sistemas amortiguados la amplitud decrece hasta detenerse el objeto oscilante.
- ☐ Para realizar un movimiento con una oscilación forzada no es necesario utilizar una fuerza externa.
- ☐ Para un objeto con movimiento armónico simple cuya amplitud es A, la energía cinética es igual a la potencial en la posición $x = A/2$.
- ☐ Para aumentar la energía de un sistema oscilante es necesario que la fuerza externa entre en resonancia con el sistema.

2 Establece diferencias entre:

a. La energía cinética y la energía potencial de un sistema oscilante.

b. El período de un péndulo simple y un sistema masa-resorte.

3 La energía mecánica asociada a un sistema masa-resorte que oscila horizontalmente es de 32 J. La constante elástica del resorte de masa despreciable es 400 N/m. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

a. La amplitud del movimiento es 0,4 m.

b. En los extremos de la trayectoria la energía potencial es nula.

c. En el punto central de la trayectoria la energía cinética es máxima.

d. Para una elongación de $0{,}2\sqrt{2}$ m, la energía potencial elástica tiene el mismo valor que la energía cinética.

4 Un péndulo simple de longitud L y masa m oscila con un período T. La cuerda del péndulo no se puede extender y se desprecia su masa. Si la longitud L varía podemos afirmar que:

a. La frecuencia de oscilación disminuye.

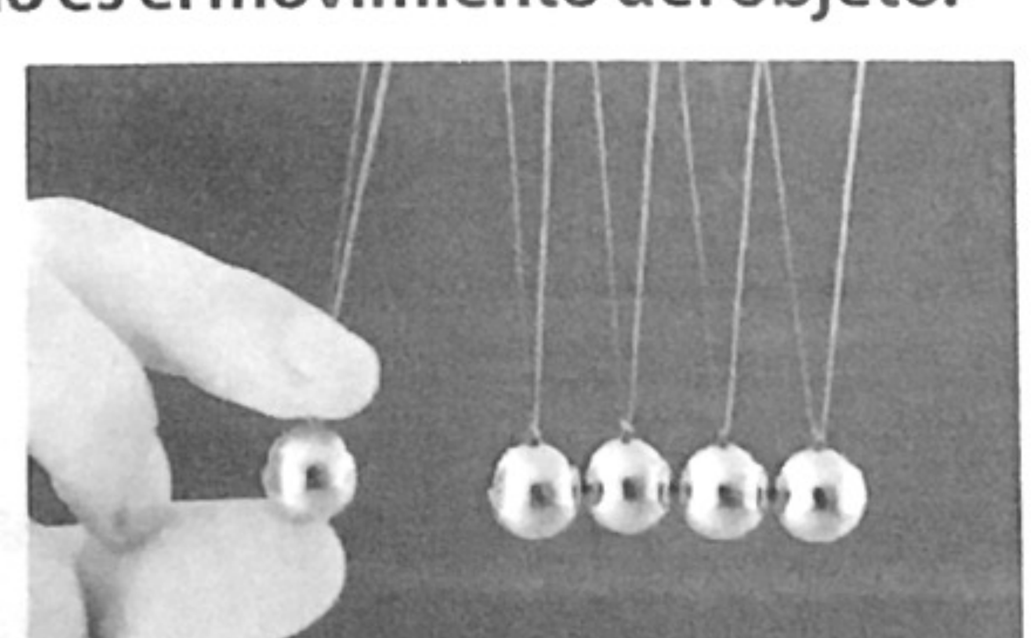
b. Manteniendo la longitud constante y aumentando la masa m, el período aumenta.

c. Manteniendo constante la longitud de la cuerda del péndulo, si se traslada el péndulo a otro lugar donde la aceleración de la gravedad es mayor, el período aumenta.

d. Durante la oscilación, al pasar por la posición de equilibrio la tensión de la cuerda es diferente al peso del péndulo.

5 Se construye un péndulo que tiene suspendida una bola llena de arena con un orificio en la parte inferior, como se muestra en la figura. Mientras el péndulo oscila, la arena va saliendo por el orificio. Se observa que el período de oscilación primero aumenta y luego, disminuye. Explica por qué sucede esto.

6 Explica qué sucede con la energía del péndulo que se muestra en la figura, y explica cómo es el movimiento del objeto.



AFIANZO COMPETENCIAS

SOLUCIONO PROBLEMAS

7 Las masas oscilantes de dos péndulos simples son de 25 g y 50 g, respectivamente, y la longitud del hilo del primer péndulo es el doble que la del hilo del segundo péndulo. ¿Cuál de los dos péndulos tendrá un período mayor?

8 Un resorte de constante elástica de 120 N/m oscila entre los puntos *A* y *B* separados entre sí 16 cm. Si despreciamos la fricción, ¿cuál es la energía asociada al sistema?

9 Un cuerpo de 4 kg oscila, apoyado en un plano horizontal, vinculado a un resorte de 200 N/m. Todas las fricciones son despreciables. Si la amplitud es 10 cm, calcula:

a. La máxima energía potencial.

b. La velocidad máxima.

c. La aceleración máxima.

10 Un cuerpo de masa 1.000 kg oscila ligado a un resorte de constante elástica de 200 N/m. Se estira 0,15 m a partir de su posición de equilibrio y se suelta. Calcula la distancia que se aleja de la posición de equilibrio en el otro extremo de la trayectoria, si en el recorrido hasta él se disipa el 40% de la energía mecánica a causa de la fricción.

11 Un astronauta puso a oscilar un péndulo en la Luna con el fin de medir el campo gravitatorio de nuestro satélite natural, y registró un período de 2,45 s. Si en la Tierra, el mismo péndulo registró un período de 1 s, ¿cuál es la relación entre la gravedad de la Luna y la de la Tierra?

12 Un péndulo simple de un metro de longitud realiza 90 oscilaciones en 3 minutos. Calcula el valor de la aceleración de la gravedad en m/s^2.

13 La longitud de un péndulo es 4 m. Calcula la frecuencia de oscilación del péndulo considerando $g = \pi^2\ m/s^2$.

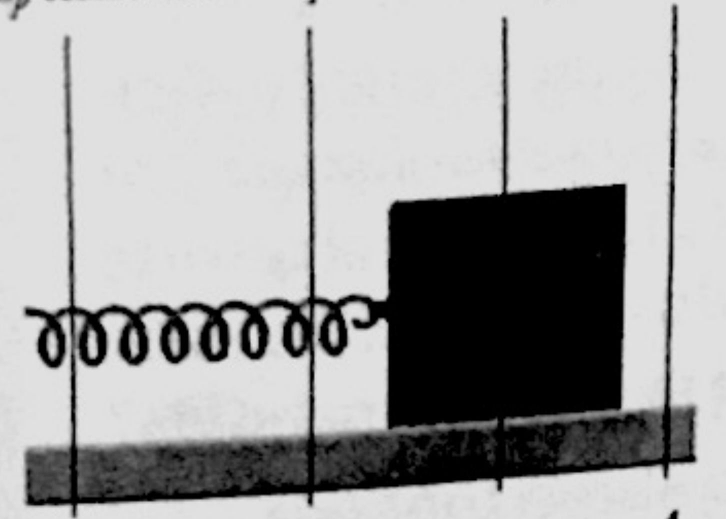


Figura 6. En el movimiento armónico simple la energía mecánica se conserva, al transformarse la energía potencial en cinética y viceversa.

Actividad

Enlace web

2. La energía en los sistemas oscilantes

2.1 La energía en el movimiento armónico simple

Un movimiento armónico simple se produce en ausencia de fricción, pues la fuerza neta que actúa sobre el objeto (fuerza de restitución) es conservativa y la energía mecánica total se conserva.

Al estirar o comprimir un resorte se almacena energía potencial por efecto del trabajo realizado sobre él. En la figura 6 se observa que en los puntos extremos A y $-A$, la energía potencial es máxima, debido a que la deformación del resorte es máxima, y nula cuando está en su posición de equilibrio.

Por otra parte, mientras el objeto oscila, la energía cinética es cero en los puntos extremos de la trayectoria, y máxima al pasar por la posición de equilibrio.

Esto se debe a que cuando $x = 0$ la magnitud de la velocidad es máxima.

Al escribir el análisis anterior tenemos que en el resorte la energía potencial es elástica y se expresa como:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

siendo x la longitud de la deformación. La energía cinética está dada por la expresión:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Como la energía mecánica se conserva, la energía de la partícula es:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

En los puntos extremos, $x = A$ o $x = -A$, la velocidad es cero, por tanto, la energía en dichos puntos es potencial, y se expresa como:

$$E_m = E_p + E_c$$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 + 0$$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

En el punto de equilibrio, $x = 0$, la fuerza de restitución ejercida por el resorte, y por consiguiente la energía potencial elástica, es igual a cero. Es decir, en la posición de equilibrio, la energía del sistema es cinética.

$$E_m = E_p + E_c$$

$$E_m = 0 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{máx}^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{máx}^2$$

De esta forma se puede hallar la energía mecánica del sistema oscilante cuando se conoce la velocidad máxima.

Mis compromisos personales y sociales

Aunque los electrodomésticos se encuentren apagados muchos de ellos siguen consumiendo energía. Un ejemplo claro es el equipo de sonido que, aunque se apague, sigue mostrando información como la hora. Esto se debe a que los circuitos internos tienen osciladores electrónicos que replican una señal una y otra vez sin parar.

Consulta acerca de los electrodomésticos vampiros. Luego, concreta acciones con tus compañeros para evitar este consumo de energía.