Potenciación de los naturales

La **potenciación** es una operación que permite escribir, en forma abreviada, productos cuyos factores son todos iguales.

Dados a, b y $n \in \mathbb{N}$, se define la potenciación como

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\text{ veces}} = b$$

Donde, a es la **base** (factor que se repite); n es el **exponente** (indica el número de veces que se repite la base) y b es la **potencia** (resultado de multiplicar la base tantas veces como indica el exponente). Se lee "a elevado a la n es igual a b" o "b es la n-ésima potencia de a".

TEN en cuenta

Los elementos de la potenciación son:

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{Cuatro factores}} = \overset{\text{Exponente}}{3^4} = 81$$

Base

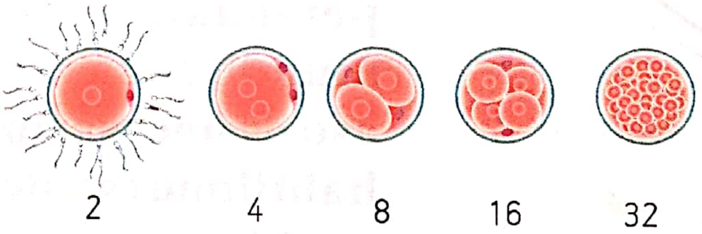
Potencia

Por ejemplo, $12^4 = 20.736$ porque $12 \times 12 \times 12 \times 12 = 20.736$. Donde 12 es la base, 4 el exponente y 20.736 la potencia.

Algunas potencias reciben nombres especiales. por ejemplo, si un número que está elevado al exponente 2, se dice que está "**elevado al cuadrado**" y si está elevado al exponente 3, se dice que está "**elevado al cubo**".

Ejemplos

1. **El cigoto, célula resultante de la unión de un gameto masculino con uno femenino, se divide en dos partes iguales en forma sucesiva, es decir, que la cantidad de células se duplica cada vez. Según esta regla, ¿cuantas células habrá en la fase 3? ¿Cuántas en la fase 5? ¿Cuántas en la fase n?**



Observemos cómo se relaciona cada fase con la cantidad de células.

Fase	Potenciación	Cantidad de células
1	$2^1 = 2$	2
2	$2^2 = 2 \cdot 2$	4
3	$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$	8
4	$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	16
5	$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	32
...	...	...

Por tanto, en la fase 3 habrá 8 células; en la fase 5, 32 células y en la fase n habrá 2^n células.

TEN en cuenta

El valor de una potenciación de base 10 es aquella que tiene tantos ceros como lo indique el exponente.

2. **Resolvamos las potencias 10^3 y 10^6.**

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$$
$$10^6 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000.000$$

Propiedades de la potenciación

La potenciación en el conjunto de los números naturales cumple con las siguientes propiedades.

Propiedad	Generalización	Ejemplo
Producto de potencias de igual base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$3^5 \cdot 3^2 = 3^{5+2} = 3^7 = 2.187$
Cociente de potencias de igual base	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{4^7}{4^5} = 4^{7-5} = 4^2 = 16$
Potencia de una potencia	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(2^2)^4 = 2^{2 \cdot 4} = 2^8 = 256$
Potencia de un producto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(5 \cdot 2)^3 = 5^3 \cdot 2^3 = 125 \cdot 8 = 1.000$
Potencia de un cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ b \neq 0$	$\left(\frac{12}{4}\right)^2 = \frac{12^2}{4^2} = \frac{144}{16} = 9$

El cero y el uno en la potenciación

Cuando la base o el exponente de una potencia son los números 0 o 1, se determinan las siguientes propiedades:

- $a^0 = 1$, si $a \neq 0$. Por ejemplo, $8^0 = 1$.
- $a^1 = a$, recibe el nombre de primera potencia de a. Por ejemplo, $7^1 = 7$.
- $1^n = 1$. Porque $\underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n\text{-factores}} = 1$. Por ejemplo, $1^{35} = 1$.
- $0^n = 0$. Porque $\underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0}_{n\text{-factores}} = 0$. Por ejemplo, $0^5 = 0$.
- 0^0 no está definido.

Ejemplos

Utilicemos las propiedades de la potenciación para hallar los resultados.

a. $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3$

$= 3^{1+2+3}$ ✓ Producto de potencias de igual base.

$= 3^6$ Operamos.

$= 729$ Calculamos la potencia.

b. $\frac{(2 \cdot 3)^4}{2^2 \cdot 3^3}$

$= \frac{2^4 \cdot 3^4}{2^2 \cdot 3^3}$ ✓ Potencia de un producto.

$= 2^{4-2} \cdot 3^{4-3}$ Cociente de potencias de igual base.

$= 2^2 \cdot 3$ Operamos.

$= 4 \cdot 3$ Calculamos la potencia.

$= 12$ Operamos.

c. $(4^3)^2$

$= 4^{3 \cdot 2}$ Potencia de una potencia.

$= 4^6$ Operamos.

$= 4.096$ Calculamos la potencia.

d. $\frac{10^4 \cdot 15^5}{6^3 \cdot 5^9}$ ✓

$= \frac{(2 \cdot 5)^4 \cdot (3 \cdot 5)^5}{(2 \cdot 3)^3 \cdot 5^9}$ Descomponemos a 10, 15 y 6 en sus factores primos.

$= \frac{2^4 \cdot 5^4 \cdot 3^5 \cdot 5^5}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^9}$ Potencia de un producto.

$= \frac{2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^9}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^9}$ Producto de potencias de igual base.

$= 2 \cdot 3^2$ Cociente de potencias de igual base.

$= 2 \cdot 9 = 18$ Calculamos la potencia.

Actividades para *aprender*

Razonar 1-6, 11-14, 22-25 ▸ Comunicar 7-10, 15-16, 26-27 ▸ Ejercitar 17-21 ▸ Solucionar problemas 28-30

Recordar

Encuentra los elementos que hacen falta en cada expresión.

1. $3^{\square} = 81$ **3.** $\square^4 = 16$ **5.** $5^4 = \square$

2. $\square^3 = 216$ **4.** $12^{\square} = 1$ **6.** $7^0 = \square$

Identifica si cada expresión es V (verdadera) o F (falsa). Argumenta.

7. ☐ $\frac{7^3}{7^3} = 7^0$

8. ☐ $6^5 - 6^2 = 6^3$

9. ☐ $2^2 = 2^2 + 2^3 + 2^4$

10. ☐ $(12 \cdot 23)^2 = 12^2 \cdot 23^2$

Encuentra un número natural que cumpla la condición dada en cada caso.

11. Número que al elevarlo al cuadrado y restarle 1 da 63.

12. La suma del número y su cuadrado da 30.

13. Número que al elevarlo al cuadrado da un número palíndromo (se lee igual al derecho o al revés).

14. Número más pequeño que al elevarlo al cuadrado tiene unidades de mil.

Comprender

Explica el error en cada cálculo. Luego, corrígelo.

15. $(15 - 11)^2 \cdot 12 + 3^5$

$= (15^2 - 11^2) \cdot 12 + 243$

$= (30 - 22) \cdot 255$

$= 2.040$

16. $\frac{11^8}{11^6} - \frac{24}{2^3}$

$= 11^2 - \frac{24}{6}$

$= 121 - \frac{24}{6}$

$= 117$

Resuelve aplicando las propiedades de la potenciación.

17. $3^4 \cdot 27^4$

18. $\frac{(2 \cdot 9)^{12}}{(9 \cdot 2)^5 \cdot 2^7} \cdot 9^3$

19. $\frac{12^7}{(12^2)^3} + \frac{(9^5)^2}{9^8} - (13^3)^0$

20. $\frac{25^3}{5^4}$

21. $\frac{16^6 \cdot 25^{12}}{8^6 \cdot 125^8}$

Evaluar

Verifica si son válidas las siguientes igualdades y con base en los resultados plantea una conclusión general para cada caso.

22. $(2^3 + 2^5)^2 = 2^6 + 2^{10}$

23. $2^3 + 2^5 = 2^8$

24. $3^2 + 3^3 = 3^5$

25. $(3^2 + 3^3)^2 = 3^4 + 3^6$

Argumentar

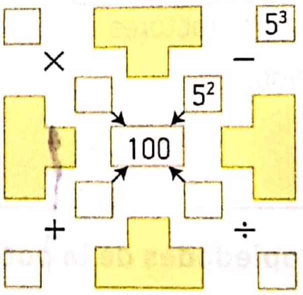
26. ¿Crees que $3^2 = 2^3$? ¿Puedes afirmar que la propiedad conmutativa se cumple en la potenciación?

27. ¿Un número elevado al cubo siempre es más grande que el mismo número al cuadrado?

Crear

Soluciona.

28. Escribe en cada cuadro las potencias 30^2, 8^2, 1^5, 3^2, 10^2 y 6^2, de tal forma que de la operación indicada resulte el número del rectángulo.



29. Un escritorio tiene 4 divisiones. Si en cada división hay 4 grupos de lápices y en cada grupo hay 4 lápices, ¿cuántos lápices hay en total?

PRUEBA SABER

30. Diego envía un mensaje de texto a tres personas en un minuto. Cada persona que lo recibe reenvía el mensaje a otras tres personas en un minuto. ¿A cuántas personas llegó el mensaje al cabo de 3 minutos?

A. A 27 personas. **C.** A 39 personas.

B. A 28 personas. **D.** A 40 personas.