Propiedades de la potenciación de números enteros

Cuando resolvemos operaciones con potencias, debemos tener en cuenta las siguientes propiedades:

Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $m, n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

Propiedad	Simbolización	Ejemplo
Producto de potencias de igual base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(-2)^3(-2)^2 = (-2)^{3+2} = (-2)^5$
Cociente de potencias de igual base	$a^m \div a^n = a^{m-n}$	$(-4)^5 \div (-4)^2 = (-4)^{5-2} = (-4)^3$
Potencia de una potencia	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$[(-2)^2]^3 = (-2)^{2 \cdot 3} = (-2)^6$
Potencia de un producto	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	$[(+2) \cdot (-5)]^2 = (+2)^2 \cdot (-5)^2$
Potencia de un cociente	$(a \div b)^m = a^m \div b^m$	$[(-6) \div (+3)]^2 = (-6)^2 \div (+3)^2$
Exponente cero	$a^0 = 1$	$\left.\begin{array}{l} 5^2 \div 5^2 = 25 \div 25 = 1 \\ 5^2 \div 5^2 = 5^{2-2} = 5^0 \end{array}\right\}$ En conclusión: $5^0 = 1$
Exponene uno	$a^1 = a$	$3^1 = 3$
Potencia de uno	$1^n = 1$	$1^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

Ejemplos

1. Aplicando las propiedades de la potenciación, expresemos cada enunciado como una sola potencia.

a. $(-4)^6 \times (-4)^2 \times (-4)^3$

$= (-4)^6 \times (-4)^2 \times (-4)^3$ Aplicamos la propiedad producto de potencias de igual base.

$= (-4)^{6+2+3}$

$= (-4)^{11}$

b. $\dfrac{(7^3)^2 \times 7^4 \times (7^4)^6}{7^7 \times (7^2)^5}$

$= \dfrac{(7^3)^2 \times 7^4 \times (7^4)^6}{7^7 \times (7^2)^5}$ Aplicamos la propiedad potencia de una potencia.

$= \dfrac{7^6 \times 7^4 \times 7^{24}}{7^7 \times 7^{10}}$ Usamos la propiedad de producto de potencias de igual base.

$= \dfrac{7^{34}}{7^{17}}$ Por último, aplicamos la propiedad cociente de potencias de igual base.

$= 7^{34-17}$

$= 7^{17}$

EDUCACIÓN *económica* Y *financiera*

Existen diferentes clases de consumo responsable; uno de ellos es el consumo sostenible, el cual hace uso de bienes y servicios que responden a necesidades básicas y proporcionan una mejor calidad de vida. Al mismo tiempo, minimizan el uso de recursos naturales, materiales tóxicos y contaminantes.

A continuación, se nombran tres productos que consumimos o utilizamos con regularidad. ¿Qué cambios puedes asumir para no dejar de utilizarlos, pero garantizar un consumo sostenible?

- Bolsas
- Botellas
- Transporte

Radicación de números enteros

La **radicación** es la operación inversa de la potenciación que permite encontrar la base cuando se conocen el exponente y la potencia.

Si $a, b \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n > 2$, se cumple que $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$

Índice

$$\sqrt[3]{-64} = -4$$

Radicando Raíz

En la expresión $\sqrt[n]{a} = b$ se identifican los siguientes elementos: el índice del radical es n, la cantidad subradical o radicando es a, el símbolo radical es $\sqrt{}$, la raíz n-ésima de a es b.

En la radicación de números enteros se presentan los siguientes casos:

Casos	Raíz		Comprobación
Índice par y radicando positivo	$\sqrt{9} = \pm 3$	La raíz es positiva o negativa.	$(3)^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$
Índice impar y radicando positivo	$\sqrt[5]{32} = 2$	La raíz es positiva.	$(2)^5 = 32$
Índice impar y radicando negativo	$\sqrt[3]{-8} = -2$	La raíz es negativa.	$(-2)^3 = -8$
Índice par y radicando negativo	$\sqrt{-16} \notin \mathbb{Z}$	$\sqrt[4]{-81} \notin \mathbb{Z}$	No es posible en $\mathbb{Z}$.

HAZLO *tú*

¿Qué diferencia hay entre $-\sqrt{25}$ y $\sqrt{(-25)}$?

Propiedades de la radicación

Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $m, n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

Propiedad	Simbolización	Ejemplo
Raíz de un producto	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{27} = -2 \cdot 3 = -6$
Raíz de un cociente	$\sqrt[n]{a \div b} = \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{64 \div (-8)} = \sqrt[3]{64} \div \sqrt[3]{-8} = 4 \div (-2) = -2$
Raíz de una potencia	$\sqrt[n]{a^m} = a^{m \div n}$	$\sqrt[3]{(-2)^6} = (-2)^{6 \div 3} = (-2)^2 = 4$
Raíz de una raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2 \cdot 3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$

Ejemplo

Simplifiquemos la siguiente expresión aplicando las propiedades de la radicación.

$\sqrt[4]{625 \times 256}$

$= \sqrt[4]{625} \times \sqrt[4]{256}$ Por la propiedad raíz de un producto.

$= \sqrt[4]{5^4} \times \sqrt[4]{4^4}$ Se expresan los radicandos como potencias

$= 5^{\frac{4}{4}} \times 4^{\frac{4}{4}}$ Por propiedad raíz de una potencia.

$= 5 \times 4 = 20$ Resolvemos el producto.

TEN *en cuenta*

$\sqrt[n]{a^n} = a$

Para evitar ambigüedades cuando n sea par tomaremos el valor positivo de la raíz.

Actividades para *aprender*

Recordar

Encuentra el valor de x a partir de las condiciones dadas.

1. $x^3 = +64$

2. $x^5 = -1.024$

3. $x^5 = 243$

4. $x^3 = -216$

5. $x^2 = 49$

6. $x^6 = 729$

7. $3^x \cdot 3^5 = 3^9$

8. $(-312)^x = 1$

9. $16^7 \div 16^x = 16^2$

10. $(5^3)^x = 125$

11. $(-5)^x = -125$

12. $17^8 \div 17^x = 17^3$

Comprender

Completa la tabla.

	Potencia	Base	Exponente	Valor	Como raíz
13.	$(-12)^3$				
14.		4	3		
15.				-216	
16.			5	243	
17.	-5			625	

Aplicar

Calcula las siguientes potencias.

18. $(-14)^2$

19. $(-5)^4$

20. $(-13)^4$

21. $(-7)^4$

22. $(-400)^0$

23. $-(8)^3$

Desarrolla los siguientes ejercicios.

24. $(((-7)^5)^4)^0$

25. $(((7)^2)^1)^5$

26. $((((-6)^3)^1)^3)^1$

27. $(((-7)^2)^4)^0$

28. $\sqrt[3]{-2.744}$

29. $\sqrt[3]{1.296}$

30. $\sqrt[5]{-32}$

31. $\sqrt[8]{1}$

Calcula el resultado en cada caso.

32. $\sqrt{169 \times 121}$

33. $\sqrt[3]{(-512) \times 343}$

34. $\sqrt[6]{9^6 \times 3^{12}}$

35. $\sqrt[3]{(-5)^{12} \div (-5)^6}$

36. $\sqrt[4]{((-12)^2)^4}$

37. $\sqrt[8]{(17^4)^2}$

38. $\sqrt[12]{((-5)^6)^2}$

39. $\sqrt[8]{(-5)^{16}}$

40. $\sqrt[5]{(-256)(-4)}$

41. $\sqrt{6.561 \div 9}$

42. $\sqrt[5]{(-4)^{10}(-9)^5}$

43. $\sqrt{(5^3)^2 \div 625}$

44. $\sqrt[4]{4^8 \times 2^{12} \times 7^4}$

45. $\sqrt[3]{1.331 \times 343}$

46. $\sqrt[4]{(-3)^8 \div (-3)^4}$

47. $\sqrt[4]{(-1)^4 \times (-1)^4}$

Resuelve las siguientes situaciones.

48. Halla las dimensiones de una barra metálica de $2.058\ cm^3$ de volumen, si el largo es el doble del ancho y el alto el triple del ancho.

49. Determina la longitud de la arista de cada cuadrado de acuerdo con su área.

a. $A = 49\ cm^2$

b. $A = 121\ cm^2$

c. $A = 289\ cm^2$

50. Los virus de PC se caracterizan por copiarse una y otra vez hasta llenar la memoria del equipo. Si un virus tiene la capacidad de autocopiarse 6 veces por minuto y cada copia repite este proceso, ¿cuántas copias habrá al cabo de 4 minutos?

51. Carol organizó su colección de prendedores en una caja de 6 compartimientos y en cada compartimiento puso 6 prendedores. ¿Cuántos prendedores tiene Carol?

Analizar

Responde las preguntas. Explica tu respuesta.

52. En la igualdad $(-1)^n = -1$, ¿el exponente puede ser cero?

53. Es posible afirmar que $(-3)^2$ ¿es lo mismo que 3^2?

PRUEBA SABER

54. María trajo de su viaje tres paquetes con tres cajas cada uno, cada caja tiene tres bolsas y cada bolsa, dos lápices. ¿Cuántos lápices trajo María de su viaje?

A. 18 lápices

B. 6 lápices

C. 3 lápices

D. 54 lápices