

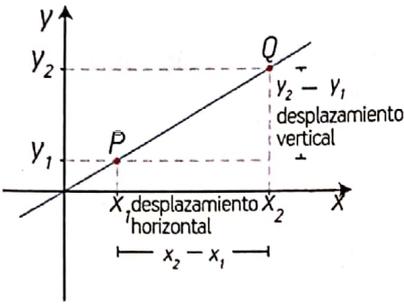
La recta y su pendiente

La constante m , en la ecuación de una recta $y = mx + b$, se denomina **pendiente**.

La pendiente de una recta representa la razón entre el incremento vertical respecto al incremento horizontal, para cualquier par de puntos P y Q sobre la recta. Para $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ la pendiente es equivalente a la siguiente ecuación: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Se debe tener en cuenta que si $m > 0$, la recta es creciente; o que si $m < 0$ la recta es decreciente. Las líneas horizontales son rectas en las que $m = 0$.

Gráficamente, la pendiente muestra el desplazamiento vertical y el desplazamiento horizontal, como observamos en la imagen de la izquierda.



Ejemplos

- Determinemos la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(3, 0)$ y $B(4, -2)$

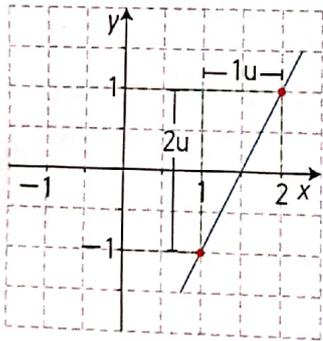
Aplicamos la fórmula de la pendiente y operamos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 0}{4 - 3} = \frac{-2}{1} = -2$$

Por tanto, la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B es igual a -2 .

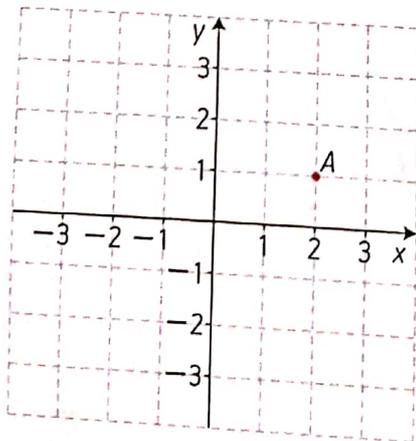
- Determinemos a partir de la gráfica de la izquierda, dos puntos por los cuales pase la recta dada, su pendiente y si crece o decrece.

Observamos que el desplazamiento en y es 2 unidades y en x es 1 unidad, por tanto, $m = \frac{2}{1} = 2$. La recta pasa por los puntos $(1, -1)$ y $(2, 1)$. Además, la recta es creciente porque su pendiente es positiva.

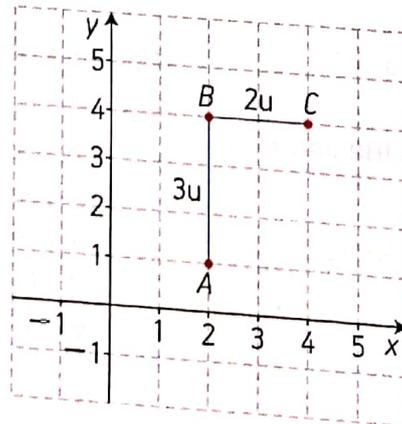


- Representemos la recta que pasa por el punto $A(2, 1)$ y $m = \frac{3}{2}$.

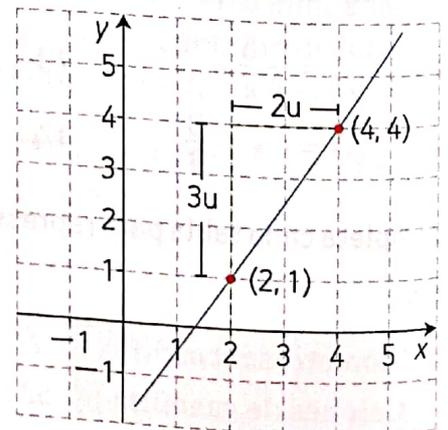
Primero, ubicamos el punto $A(2, 1)$ en el plano cartesiano.



Ubicamos los desplazamientos teniendo en cuenta que el numerador de m indica el desplazamiento en y y el denominador el desplazamiento en x .



El punto $C(4, 4)$ es el otro punto por el que pasa la recta.



Ecuación explícita de la recta



La expresión algebraica $y = mx + b$ determina la ecuación **explícita** de la recta, en la cual m es el valor de la pendiente y b el punto de corte de la recta con el eje y .

Por ejemplo, a partir de la expresión $5x - 4y = -8$ podemos determinar la ecuación explícita de la recta al realizar las operaciones correspondientes para reescribirla de la forma $y = mx + b$, así:

$$5x - 4y = -8$$

$$-4y = -5x - 8 \quad \text{Restamos } 5x \text{ a ambos lados de la igualdad.}$$

$$y = \frac{5}{4}x + 2 \quad \text{Dividimos por } -4 \text{ a ambos lados de la igualdad.}$$

Por tanto, $m = \frac{5}{4}$ y $b = 2$. Observamos la gráfica de recta en la imagen.

Podemos determinar la ecuación explícita de una recta si:

- **Conocemos un punto $P(x, y)$ y la pendiente m :** en este caso, reemplazamos los valores x, y y m en la ecuación $y = mx + b$, luego despejamos el valor de b .
- **Conocemos dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$:** para calcular la pendiente usamos la ecuación de la pendiente con las coordenadas de los puntos P y Q . Luego, a partir de la pendiente y uno de los puntos dados procedemos como se indica en el caso anterior.

Ejemplo

Un barco tiene una trayectoria recta durante su recorrido, en la carta de navegación, debe pasar por los puntos $P(-1, 2)$ y $Q(3, -4)$. Determinemos la ecuación de la recta que describe la trayectoria del barco.

Conocemos dos puntos de la recta, por lo tanto, para determinar la pendiente usamos la fórmula de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Ahora, para determinar el valor de b , reemplazamos los valores de las coordenadas de uno de los puntos y de la pendiente en la ecuación explícita, por ejemplo, si escogemos $P(-1, 2)$ obtenemos:

$$y = mx + b$$

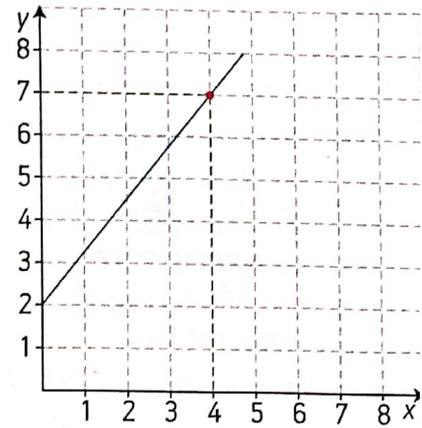
$$2 = \left(-\frac{3}{2}\right)(-1) + b \quad \text{Reemplazamos } m \text{ y } P(-1, 2).$$

$$2 - \frac{3}{2} = b \quad \text{Realizamos las operaciones.}$$

$$\frac{1}{2} = b \quad \text{Despejamos } b.$$

Así, la ecuación de la recta que describe la trayectoria del barco es

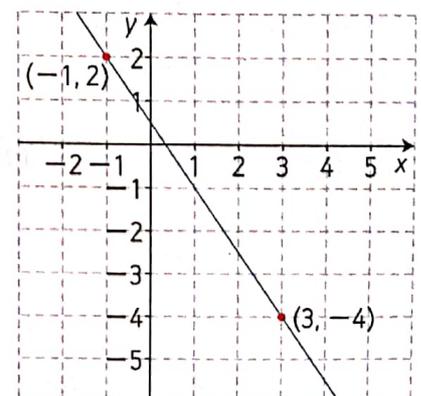
$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$



TRABAJO POR LA PAZ

Trabajo en grupo. Ten en cuenta la información de esta sección de la página 36.

- Reúnanse y escojan un escenario: la familia, el colegio, el barrio, la ciudad, el país.
- Relaten situaciones de rechazo y de amor (según la definición de Maturana) que tengan lugar en el escenario escogido y elaboren una cartelera con el resumen de sus hallazgos.
- Realicen un debate cuyo tema sea las acciones que más se repiten en cada escenario.



Ecuación general de la recta



**MI PROYECTO
de vida**

Comunicación

Para establecer relaciones interpersonales saludables es importante tener una buena comunicación.

Es a través de ella que se nos permite transmitir sentimientos, expresarnos y escuchar a los demás para conocerlos mejor y entender lo que necesitan.

Otra expresión que determina una recta es $Ax + By + C = 0$, donde $A, B, C \in \mathbb{R}$ y A y B no son 0 al mismo tiempo; esta forma recibe el nombre de ecuación general de la recta.

Si la ecuación de una recta está dada de forma explícita, entonces, su forma general se puede obtener con algunas operaciones algebraicas.

Por ejemplo, escribamos la ecuación general de la recta de ecuación $y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{4}$.

Para esto, primero igualamos toda la expresión a cero.

$$y - \frac{5}{3}x + \frac{1}{4} = 0$$

Luego, realizamos las operaciones en ambos lados de la ecuación.

$$\frac{12y - 20x + 3}{12} = 0 \rightarrow 12y - 20x + 3 = 0 \quad (12)$$

$$12y - 20x + 3 = 0 \rightarrow -20x + 12y + 3 = 0$$

Por tanto, $A = -20, B = 12, C = 3$

Ejemplo

Milena es artesana y está produciendo bisutería que combina tejidos y semillas de diferentes colores. La primera inversión de Milena será \$150.000. Si cada paquete de semillas cuesta \$5.000 y cada madeja de lana \$15.000, determinemos la ecuación general, la ecuación explícita y la gráfica que modela la situación.

Para hallar la ecuación general de la recta que modela la situación, primero definiremos las variables. Llamaremos x al número de paquetes de semillas y y al número de madejas compradas.

Ahora, como la inversión con la que cuenta Milena es de \$150.000, esto será igual al costo de las semillas, más el costo de las madejas. De este modo la ecuación es:

$$5.000x + 15.000y = 150.000 \rightarrow 5.000x + 15.000y - 150.000 = 0$$

Ahora realizamos las operaciones necesarias para escribir la ecuación de la forma $y = mx + b$.

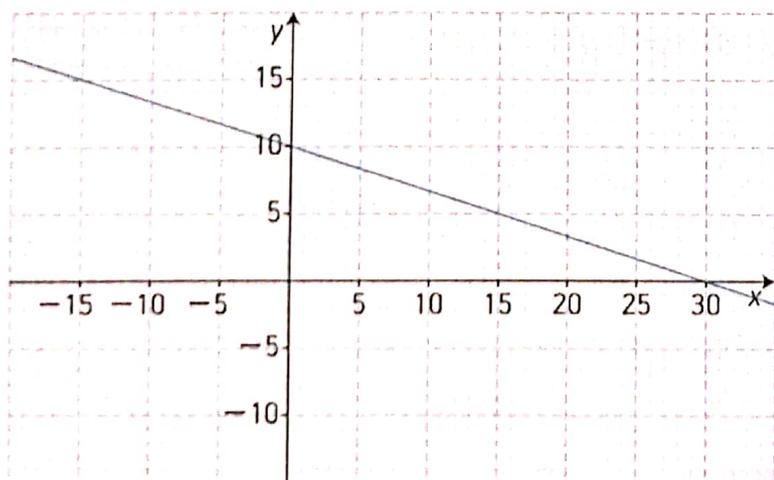
$$5.000x + 15.000y - 150.000 = 0$$

$$15.000y = -5.000x + 150.000$$

$$y = -\frac{5.000}{15.000}x + \frac{150.000}{15.000}$$

$$y = -\frac{x}{3} + 10$$

Para realizar la gráfica debemos tener en cuenta que $m = -\frac{1}{3}$ y $b = 10$



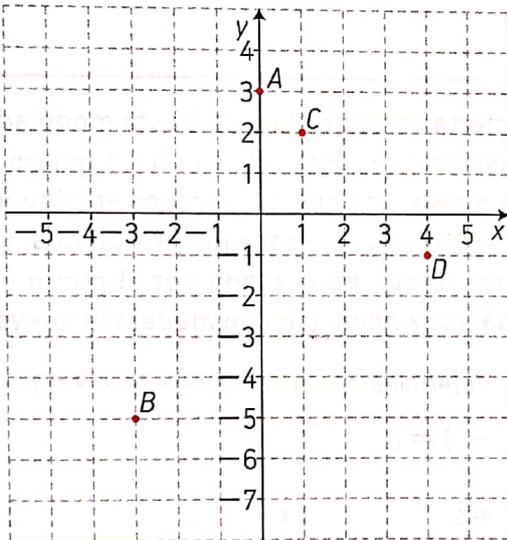
Comprender

Determina si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

- Una recta que forma un ángulo de 120° con respecto a la horizontal tiene una pendiente positiva.
- La pendiente de una recta que pasa por los puntos $P(2, -3)$ y $Q(1, 1)$ es la misma que la que pasa por los puntos $P(-2, 3)$ y $Q(-1, -1)$.
- La pendiente de la ecuación $5x - 2y + 3 = 0$ es $m = \frac{5}{2}$.
- Toda función lineal tiene la misma pendiente.
- Si el ángulo entre dos rectas es de 105° , entonces una recta es creciente y la otra decreciente.

Aplicar

Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos indicados, a partir de la información en la figura.



- | | | |
|--------------|--------------|---------------|
| 6. A y B | 8. B y D | 10. A y C |
| 7. C y D | 9. B y C | 11. D y A |

Calcula el valor de c de tal forma que la pendiente de la recta que forman los puntos P y Q sea la indicada.

- $P(4, 6)$, $Q(-2, c)$ y $m = 1$
- $P(-2, 3)$, $Q(c, 1)$ y $m = -\frac{2}{3}$
- $P(c, 2)$, $Q(-4, 7)$ y $m = -1$
- $P(8, 2c)$, $Q(3, 9)$ y $m = -\frac{3}{5}$

Analizar

Determina la ecuación explícita de la recta que cumple las condiciones dadas en cada caso.

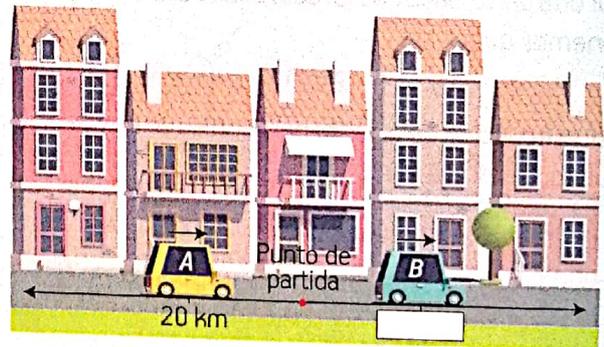
- Es de la forma $4x + 2y + C = 0$ y pasa por el punto $P(-1, 3)$.
- Pasa por el punto $(2, 2)$ y tiene la misma pendiente de la recta $-3x - 6y + 9 = 0$

Resuelve cada situación.

- El precio de tres manzanas es \$3.600. ¿Con esta información es posible determinar una ecuación lineal que modele el precio de x manzanas? En caso afirmativo, expresa la ecuación que modela el costo, en caso negativo explica por qué.
- El total de gastos de una empresa se modela con una ecuación lineal en función de la cantidad de x unidades producidas. Si se sabe que al producir diez unidades se tienen gastos equivalentes a \$125.000, y al producir veinte unidades los gastos ascienden a \$160.000, ¿cuál es la expresión que modela los gastos en términos de las unidades producidas? ¿Cuál es el gasto fijo para la empresa?

PRUEBA SABER

- Dos carros inician su recorrido en la misma dirección, como se muestra en la figura, donde sus posiciones con respecto al punto de partida están dadas por las ecuaciones $y - 40x - 15 = 0$ y $y - 45x + C = 0$. Si los automóviles se encuentran a los 7 km, el carro B inicia su recorrido



- 20 kilómetros delante de la partida.
- 10 kilómetros delante de la partida.
- 15 kilómetros delante de la partida.
- 12 kilómetros antes de la partida.